Genauer gilt

SATZ 1.2: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand $\partial\Omega$ und $f \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ eine Lösung der nicht parametrischen Minimalflächengleichung. Ferner bezeichne M eine C^2-Mannigfaltigkeit mit

a) $M \subset \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ und

b) $\partial M = G_{f|\partial\Omega}$.

Dann gilt: $A_\Omega(f) \leq$ Flächeninhalt von M.

KOROLLAR: Ist f wie oben und $g \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ mit $g = f$ auf $\partial\Omega$, so folgt

$$\int_\Omega \sqrt{1+|\nabla f|^2}\, dx\, dy \leq \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla g|^2}\, dx\, dy.$$

Bemerkung: Ist Ω nicht konvex, so findet man unter Umständen zweidimensionale Mannigfaltigkeiten M mit

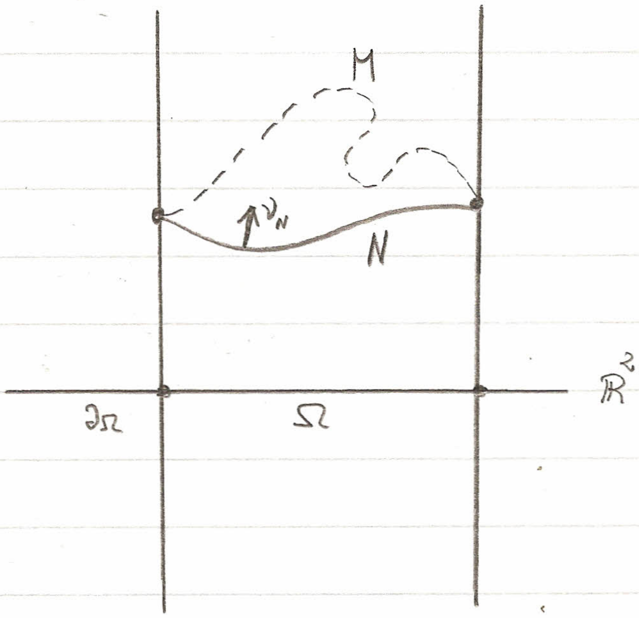
$$\partial M = G_{f|\partial\Omega}$$

und $M \not\subset \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, für die

$$\text{Flächeninhalt von } M < A_\Omega(f)$$

ist. Satz 1.2 bezieht sich deshalb also nur auf Vergleichsmannigfaltigkeiten M, die innerhalb des Zylinders $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ gelegen sind.

<u>Zum Beweis von Satz 1.2:</u> Zunächst stehen wir vor dem technischen Problem, den Flächeninhalt $\mathbb{A}(M)$ einer 2-Mannigfaltigkeit erklären zu müssen. Da diese Einzelheiten zu weit führen würden ($\rightarrow$ vgl. GMT Vorlesung), sollte man entweder auf alte Analysiskenntnisse zurückgreifen ("Oberflächenmaß") oder so argumentieren: für Graphen haben wir uns eine Inhaltsformel überlegt und kennen damit auch den Inhalt von Flächen, die durch Rotation und Translation aus Graphen erzeugt werden. Jede Mannigfaltigkeit M setzt sich aber aus abzählbar vielen Stücken zusammen, die isometrisch zu gewöhnlichen Graphen sind. Durch Zusammensetzen bekommt man schließlich eine Definition für $\mathbb{A}(M)$. Um wenigstens einen Eindruck von der Beweisidee zu bekommen, setzen wir $N = G_f$ und stellen uns die Situation wie nebenstehend gezeichnet vor:



Sind x, y wie üblich die Variablen im $\mathbb{R}^2$ und bezeichnet z die noch fehlende Ortskoordinate des $\mathbb{R}^3$, so ist

$$\nu_N(x,y) := \left(-\nabla f(x,y), 1\right) \Big/ \sqrt{1+|\nabla f(x,y)|^2}$$

in jedem Punkt $(x,y) \in \overline{\Omega}$ ein Vektor senkrecht zu N im Punkt $(x, y, f(x,y))$.

Durch die Setzung $\qquad F(x,y,z) := \nu_N(x,y) \qquad$ gewinnen wir ein Vektorfeld auf dem ganzen Zylinder $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$.

Steht "div" für den Divergenzoperator auf $\mathbb{R}^3$, so folgt:

f erfüllt die nichtparametrische Minimalflächengleichung $\Longleftrightarrow$

$$\operatorname{div} F = 0 \quad \text{auf } \Omega \times \mathbb{R},$$

und man findet deshalb ein Vektorfeld Φ auf $\Omega \times \mathbb{R}$ mit

$$F = \operatorname{rot} \Phi .$$

Man bekommt:

"Integration nach dem Oberflächenmaß"

$$\mathbb{A}(N) = \int_N 1 \cdot d\sigma \underset{F = \nu_N \text{ auf } N}{=}$$

$$\int_N F \cdot \nu_N \, d\sigma = \int_N \operatorname{rot} \Phi \cdot \nu_N \, d\sigma$$

$$= \left(\text{"Satz v. Stokes"}, \ \tau_N = \text{Tangentenfeld an } \partial N \right) =$$

$$\int_{\partial N} \Phi \cdot \tau_N \, ds \qquad (ds = \text{Linienintegration}) =$$

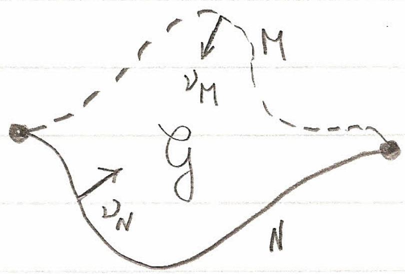
$$\int_{\partial M} \Phi \cdot \tau_M \, ds = (\text{Stokes}) = \int_M \operatorname{rot} \Phi \cdot \nu_M \, d\sigma =$$

$$\int_M F \cdot \nu_M \, d\sigma \leq \int_M 1 \cdot d\sigma = \mathbb{A}(M),$$

denn $|F \cdot \nu_M| \leq |F| \cdot |\nu_M| = |F| = 1.$

Dabei haben wir unterstellt, daß die Vergleichsfläche M <u>orientiert</u> ist, was die Existenz des Normalenfeldes ν_M impliziert.

Wenn man auf Stokes verzichten möchte, läßt sich der Beweis auch mit dem <u>Satz von Gauß</u> führen, wobei allerdings auch wieder an die Anschauung appelliert werden muß: wir unterstellen, daß M und N Rand eines Gebietes $\mathcal{G}$ sind und daß sich der Gauß-Satz auf $\mathcal{G}$ anwenden läßt.



Mit den Notationen von oben ist

$$0 = \int_{\mathcal{G}} \operatorname{div} F \quad dx\, dy\, dz$$

$$\underset{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial \mathcal{G}} F \cdot \nu_{\mathcal{G}} \quad d\sigma =$$

$$\int_N F \cdot \nu_N \, d\sigma + \int_M F \cdot \nu_M \, d\sigma =$$

$$A(N) + \int_M F \cdot \nu_M \, d\sigma .$$

Gemäß $\quad F \cdot \nu_M \geqslant -1$ auf M folgt

$$0 \geqslant A(N) - A(M)$$

wie gewünscht. Die Minimalflächengleichung ist hier wieder nur in der Form $\operatorname{div} F = 0$ eingegangen. ■

Bis jetzt haben wir noch keine Minimalfläche explizit konstruiert. Unser Fernziel ist natürlich die Lösung des

<u>Plateau Problems für Graphenminimalflächen</u> : Zu einer Kurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$, die Graph über dem Rand $\partial\Omega$ eines Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ist, finde man $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

① $\Gamma = \text{Graph}\,(f|_{\partial\Omega})$

② $A_\Omega(f) \leq A_\Omega(g)$ für alle g mit derselben Randbedingung.

Anschaulich würde man so vorgehen: man wählt eine (Minimal-) Folge f_n mit

$$\mathbb{A}(f_n) = \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla f_n|^2}\; dx\, dy$$

$$\xrightarrow[n \to \infty]{} \inf_g \mathbb{A}$$

(das Infimum wird über alle zulässigen g gebildet)

in der Hoffnung, aus $\{f_n\}$ eine konvergente Teilfolge auswählen zu können, die natürlich gegen die gesuchte Lösung konvergieren sollte. Dieser Zugang mit Variationsmethoden ist jedoch mit erheblichem Aufwand verbunden, so daß wir zunächst dem historischen Weg folgen und durch spezielle Ansätze Lösungen der nichtparametrischen Minimalflächengleichung erzeugen.

Wir suchen also Funktionen f : Teilgebiet von $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\left(1+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\,\frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \left(1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 .$$

1. <u>Die Ebenen</u> : Für $A \in \mathbb{R}^2$, $a \in \mathbb{R}$ betrachten wir

$$l(x,y) := A \cdot (x,y) + a ,$$

also die allgemeine affin lineare Funktion auf $\mathbb{R}^2$, deren Graph G_l eine Ebene in $\mathbb{R}^3$ darstellt. Natürlich ist l Lösung und ein tiefer auf <u>Bernstein</u> zurückgehender Satz besagt, daß <u>l auch die einzige ganze</u> (= auf der ganzen Ebene definierte) <u>Lösung der Minimalflächengleichung ist</u>. Das werden wir später beweisen.

2. <u>Die 1te Scherk'sche Fläche</u> :

Man sucht Lösungen f der Form

$$f(x,y) = \varphi(x) + \psi(y)$$

mit noch zu bestimmenden reellen Funktionen von einer reellen Variablen. Die Minimalflächengleichung reduziert sich auf

$$(1+\psi'(y)^2)\cdot \varphi''(x) + (1+\varphi'(x))^2 \cdot \psi''(y) = 0 \quad \text{bzw.}$$

$$\varphi''(x) \Big/ (1+\varphi'(x)^2) = -\psi''(y) \Big/ (1+\psi'(y)^2)$$

Da die linke Seite nur von x, die rechte nur von y abhängt, folgt die Konstanz der Ausdrücke, so daß wir die gewöhnliche Differential-gleichung

$$\rho'' = c \cdot \left(1 + (\rho')^2\right)$$

zu lösen haben. Mit $\lambda := \rho'$ ist

$$\lambda' = c \cdot \left(1 + \lambda^2\right),$$

und unter Beachtung von $\frac{d}{dt} \arctan t = \frac{1}{1+t^2}$ folgt

$$\left(\arctan \lambda\right)' = c \implies$$

$$\lambda(t) = \tan\left(c \cdot t + c_1\right).$$

Integriert man λ und kehrt zurück zu $f(x,y) = \varphi(x) + \psi(y)$, so bekommt man die allgemeine Lösung

$$f(x,y) = \frac{1}{a} \log\left(\cos a\cdot(x-x_0) / \cos a\cdot(y-y_0)\right) + c_1$$

mit $c_1 \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Die durch

$$\boxed{f(x,y) = \log\left(\cos x / \cos y\right)}$$

gelieferte Fläche heißt <u>Scherk's erste Fläche</u>. Als möglichen Definitionsbereich findet man das Schachbrett

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad |x - k\cdot\pi| < \pi/2 ,\ |y - l\cdot\pi| < \pi/2,\ k+l \text{ gerade}\right\}.$$

3. Der Ansatz $\boxed{\partial^2 f / \partial x^2 \equiv 0}$

führt auf die Bestimmungsgleichung

$$f(x,y) = a \cdot x \cdot \varphi(y) + \psi(y)$$

mit reellen Funktionen φ, ψ einer reellen Variablen und $a \in \mathbb{R}$. Ist $a = 0$, also

$$f(x,y) = \psi(y),$$

so reduziert sich die Minimalflächengleichung auf $\psi'' \equiv 0$, d.h.

$$f(x,y) = c_1 \cdot y + c_2,$$

und den Fall affin linearer f haben wir schon unter 1. beschrieben. Sei deshalb $a \neq 0$. Dann ist die Minimalflächengleichung äquivalent zu

$$\left(1 + a^2 \cdot \varphi^2(y)\right) \cdot \left(a x \varphi''(y) + \psi''(y)\right) =$$

$$2 \cdot a \cdot \varphi(y) \left(a \cdot x \cdot \varphi'(y) + \psi'(y)\right) \cdot a \cdot \varphi'(y) \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\psi''(y) \cdot \left(1 + a^2 \varphi^2(y)\right) + x \cdot \left\{ a \cdot \varphi''(y) \left(1 + a^2 \cdot \varphi^2(y)\right) \right\} =$$

$$2 \cdot a^2 \cdot \varphi(y) \cdot \varphi'(y) \cdot \psi'(y) + x \cdot \left\{ 2 \cdot a^3 \varphi(y) \cdot \varphi'(y)^2 \right\},$$

und Koeffizientenvergleich ergibt

i) $\quad 2 \cdot a^2 \cdot \varphi(y)\, \varphi'(y)\, \psi'(y) = \left(1 + a^2 \cdot \varphi^2(y)\right) \psi''(y)$

ii) $\quad 2 \cdot a^3\, \varphi(y)\, \varphi'(y)^2 = \left(1 + a^2 \cdot \varphi^2(y)\right) a \cdot \varphi''(y).$

bzw. (wenn ψ', ϱ' ohne Nullstellen sind)

$$i)^* \quad \psi''/\psi' = 2\, a^2 \cdot \varrho' \cdot \varrho \,/\, (1 + a^2 \cdot \varrho^2)$$

$$ii)^* \quad \varrho''/\varrho' = 2 \cdot a^2 \cdot \varrho' \cdot \varrho \,/\, (1 + a^2 \cdot \varrho^2) .$$

Man rechnet nun nach, daß ii)* umgeformt werden kann in

$$(iii) \qquad 0 = \left(\frac{\varrho'}{a^2 \cdot \varrho^2 + 1} \right)' .$$

Wie sehen die Lösungen von (iii) aus?

$$\underbrace{\varrho' \Big/ a^2 \cdot \varrho^2 + 1}_{= \left\{ \frac{1}{a} \cdot \arctan(a \cdot \varrho) \right\}'} = b \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \quad \left(\frac{1}{a} \cdot \arctan(a \cdot \varrho) \right)' = b \quad , \qquad \text{d.h.}$$

$$\frac{1}{a} \cdot \arctan(a \cdot \varrho(y)) = b \cdot y + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}, \quad \text{oder}$$

$$a \cdot \varrho(y) = \tan(a \cdot b \cdot y + a \cdot c).$$

Nun sind b, c beliebige reelle Konstanten, so daß wir $a \cdot b$, $a \cdot c$ wieder mit b und c bezeichnen dürfen und für die allgemeine Lösung von ii)* bzw. iii) den Ausdruck